Mechanik des Gummi-gebetteten Stahlreifens

Mahrenholtz, Oskar

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 2000 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.89-92

J. Cramer Verlag, Braunschweig

Oskar Mahrenholtz, Seevetal

Mechanik des Gummi-gebetteten Stahlreifens

Braunschweig, 13.10.2000*

Einleitung

Eines der klassischen Probleme der Elastomechanik ist das Setzungsverhalten eines verformbaren Tragwerks auf einer nachgiebigen Gründung. Es ist ein Dauerproblem für Bauingenieure, denn man kann zwar das Verhalten der elastomechanischen Konstruktion unter Eigenlast und Verkehrslast vorhersagen, hat aber Schwierigkeiten, dies einigermaßen verläßlich für die Bettung zu tun. Denn diese zeigt nur angenähert linear elastisches Verhalten, sie kann sich bleibend verformen, und, was schlimmer ist, sie kann fließen. Dieses Kontaktproblem hat einen eigenen Zweig der Mechanik hervorgebracht, die Bodenmechanik. Diese braucht viele empirische Daten, hat aber mit den heutigen numerischen Möglichkeiten (BEM, FEM) eine analytische Renaissance erlebt, die auch das Zeitverhalten einschließt

Eine der ersten Arbeiten zur nachgiebigen Bettung betrifft das Gleichgewicht schwimmender Platten von Heinrich Hertz, der in der Einleitung zu seinem Beitrag fast entschuldigend vermerkt, der Herr von Helmholtz habe ihm diese Publikation nahegelegt. Da der Wasserdruck linear mit der Wassertiefe zunimmt und so die Platte stützt hat man ein lineares Problem, bei dem die gesuchte Durchsenkung über die Bettung selbst von der Durchsenkung abhängt. Der Autor dieses Beitrages hat in den 60er Jahren eine Näherungslösung für ein Kraftfahrzeug auf einer Eisplatte vorgestellt. Bei dieser wie auch bei der Hertzschen Lösung hat der unendlich ferne Plattenrand keinen Einfluß auf die Lösung.

Ähnlich verhält es sich mit der vielzitierten Lösung von E. Winkler, der vor Hertz einen unendlich langen Plattenstreifen/Balken unter Einzellast untersucht hat, der auf einer linear nachgiebigen Bettung ruht [1]. Nach ihm wird eine solche Bettung häufig **Winkler-Bettung** genannt. Winklers Lösung ist zwar modellmäßig – also die Anwendbarkeit betreffend – eingeengt, hat aber den großen Vorteil, als geschlossene Lösung einer DGl. 4. Ordnung sehr durchsichtig im Hinblick auf die Systemparameter zu sein. Sie baut sozusagen von unten her auf, indem die verschiebungsabhängige Stützkraft nach vierfacher Integration auf die gesuchte Verschiebung führt. Wenn man die Lösung hat, können entsprechend durch Differentiation Balkenneigung, Balkenkrümmung (entspricht dem Biegemoment), Querkraft und – ansatzgemäß – Streckenlast (Bettungskraft) ermittelt werden. Dem Experiment ist der letztgenannte Weg praktisch

* Kurzfassung des Vortrags gehalten in der Klasse für Ingenieurwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

verschlossen, weil gemessene Verschiebungen nach mehrfacher Differentiation keine Aussagekraft mehr haben: Differentiation „rauht auf“.

Nun ist das Bettungsproblem im Maschinen- und Fahrzeugbau wieder aktuell geworden durch den Einsatz Gummi-gebetteter Radreifen. Die Gummielemente zwischen Radscheibe und Radreifen dienen in erster Linie dazu, das Rad akustisch vom Fahrzeuginnern zu entkoppeln. Da die Reifenhöhe klein gegenüber dem Reifenradius ist – der Balken ist schwach gekrümmt – kann man die Winkler-Lösung zur Analyse heranziehen. Der Einfluß des geschlossenen Ringes auf die Statik des Systems geht dabei verloren. Dieser Beitrag zeigt, wie sich der Einfluß auswirkt. Es werden erst die Winkler-Lösung als Referenzlösung und dann die Ringlösung vorgestellt.

Winkler-Lösung

Ein Euler-Bernoulli Balken, unendlich lang, linear elastisch gebettet, wird durch eine Einzelkraft belastet.

Es gelten folgende Vereinbarungen:

Koordinatensytem x,y,z mit x als Koordinate längs des Balkens, z als vertikaler Koordinate. Die in Richtung z bei $x = 0$ wirkende Kraft ist F, die dadurch hervorgerufene elastische Verschiebung ist $w = w(x)$. Der Balken hat die Biegesteifigkeit EI, es liegt gerade Biegung vor. Die Rückstellkraft in Form einer Streckenlast ist

$$q(x) = -\beta\ w(x) \qquad (1)$$

mit β als Bettungsziffer. Balkenstatik und -kinematik führen auf die Systemgleichung

$$EI\ d^4w/dx^4 + \beta\ w = 0. \qquad (2)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung hat vier Wurzeln, von denen zwei zu einer exponentiell aufklingenden Lösung gehören; sie werden unterdrückt. Man erhält so das Verschiebungsfeld

$$w(x) = F/(64EI\beta^3)^{1/4}\ \exp(-\alpha x)(\cos\alpha x + \sin\alpha x)\ . \qquad (3)$$

Der Eigenwert α ist definiert als

$$\alpha := (\beta/EI)^{1/4}/\sqrt{2}\,. \qquad (4)$$

Aus der Lösung (3) lassen sich unmittelbar die Verläufe des Biegemomentes M(x) und der Querkraft Q(x) ermitteln. Die Biegespannungen folgen aus M(x), insbesondere ihr Maximalwert unmittelbar unter der Krafteinleitung. Man erkennt allerdings sofort: Da sich der Balken streckenweise aufbiegt, dort also ohne Vorlast keine Kontaktkraft besteht, gilt die Lösung nur mit einer Vorlastverteilung so, daß stets $w \geq 0$ gewährleistet ist.

Ringlösung

Der Ring oder Reifen ruht auf einer Winklerbettung, die sich auf der starren Radscheibe abstützt. Der Ring vom Radius R ist unter Vorspannung aufgebracht. Dies hat eine Normalkraft N zur Folge, die offensichtlich über dem Umfang konstant ist, solange keine Zusatzkraft auftritt. Beim geraden Balken gab es keine Normalkraft. Diese tritt jetzt in Wechselbeziehung mit Querkraft und Biegemoment, wodurch sich der Charakter des Systems ändert.

Die Bettung hat man sich so vorzustellen, daß zwischen Reifen und Radscheibe Gummielemente liegen, die beim Durchfedern nur in Umfangsrichtung ausweichen können (Gummi ist inkompressibel); es verbleibt zwischen benachbarten Elementen nur ein kleiner Spalt, so daß man „verschmiert“ mit dem Winkler-Ansatz (1) rechnen kann. Die Gummielemente sind wie erwähnt vorgespannt.

Die Verschiebung w = w(s) zählt von der vorgespannten Lage aus. Die Umfangskoordinate s tritt an die an die Stelle von x. Das x,y,z - System ist das s folgende begleitende Dreibein.

Es ist gerechtfertigt, den Fall des rotierenden Rades auf den statischen zurückzuführen, solange keine Trägheitskräfte auftreten, die aus Schwingungen des Radsatzes herrühren. Die mit dem Fliehkraftfeld verbundene Umfangskraft führt lediglich zu einer über dem Umfang konstanten Zunahme der Normalkraft, die auf die Verschiebung w praktisch keinen Einfluß hat, da der Ring eine hohe Längssteifigkeit besitzt. Auf einer starren Schiene bewegt der Radsatz sich dann parallel zur Schiene, wobei die Bettung zusammengedrückt und der Ring aufgebogen wird. Für Ring und Bettung ist die Belastung umlaufend, was zu Wechselbiegespannungen führt, die am Radaufstandspunkt, also am Punkt der Krafteinleitung, maximal sind. Dies ergibt sich, auch mit Blick auf die Winklerlösung, unmittelbar aus der Anschauung.

Für einen unendlich großen Radius muß die gesuchte Ringlösung natürlich in die Winkler-Lösung übergehen. Die Frage lautet also: Wie stark ist der Einfluß des gekrümmten Balkens (Ringes) insbesondere auf den Momentenverlauf und damit das Feld der Normalspannungen insbesondere in der Nähe des Radaufstandspunktes s = 0.

Die Systemgleichungen führen zunächst durch Eliminieren der Querkraft auf eine ODE 2.Ordnung für die Normalkraft N – dies folgt aus der Kraftumlagerung von Q(s) und N(s) – mit der Verschiebung w(s) als koppelnder Störgröße und auf eine ODE 4. Ordnung für die Verschiebung w(s) entsprechend (2), jetzt mit -N/R als störender rechter Seite der DGl.

Man ist bei Balken-/Platten-/Schalenproblemen gewohnt, zunächst das Verschiebungsfeld zu bestimmen. Dies führt hier in eine Sackgasse. Vielmehr empfiehlt es sich, w(s) zu eliminieren. Man erhält dann die Systemgleichung [2]

$$d^6N/dx^6 + (d^4N/dx^4)/R^2 + \lambda^4\,(d^2N/dx^2) = 0, \tag{6}$$

$$\lambda = (\beta\,/EI)^{1/4} = \alpha\,\sqrt{2}, \tag{7}$$

also eine ODE 6. Ordnung für N(s). Von den beiden Doppelwurzeln Null führt eine auf N = const, erlaubt also, Vorspannung und Fliehkraft zu berücksichtigen, während die zweite einen Sprung in der Balkenneigung erzwingt, physikalisch mithin bedeutungslos ist. Die verbleibenden vier konjugiert komplexen Wurzeln sind von der Form

$$r_{1.....4} = \pm\,(\delta/L\ \pm\ i/L). \tag{8}$$

Sie liefern harmonische Lösungsanteile $N_j(s)$, die exponentiell abklingen (wie im Winkler-Fall) **und** solche, die exponentiell aufklingen, etwas, was man bei physikalischen Problemen gar nicht liebt. Hier führt es durch Überlagerung zu der gesuchten Gesamtlösung N(s), aus der dann das Verschiebungsfeld w(s) ermittelt werden kann. Die algebraischen Ausdrücke sind sehr länglich. Man bedient sich bei der Lösung am besten eines Systems der Computeralgebra, das zugleich eine hinreichende numerische Genauigkeit der Matrizenoperationen sicherstellt (kleine Differenz großer Zahlen). Es ist einzuräumen, daß das Ringproblem schlecht konditioniert ist (ill conditioned). Aber: Es führt zur genauen Lösung des Modells.

Der wesentliche Unterschied zur Winkler-Lösung ist, daß die äußere Kraft eine Normalkraft N(s) hervorruft, deren Scheitel natürlich bei s = 0 liegt, und die dort eine zusätzliche Zugspannung bewirkt. Darüber hinaus greift N(s) in den Momentenhaushalt M(s) und damit in das Biegespannungsfeld ein.

Zieht man technische Daten bei der Auswertung heran so zeigt es sich, daß die Unterschiede zwischen der Winkler-Lösung und der Ringlösung für die Zugspannungsspitze (auf der Innenseite bei s = 0) und für die Durchsenkung w(s = 0) sich um nicht mehr als 10% unterscheiden. Die Ringlösung weist die jeweils größeren Werte auf.

Folgerung: Man kann die aus der Winklerlösung folgenden Beziehungen für Spannung und Verschiebung näherungsweise verwenden.

Literatur

[1] WINKLER, E.: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. H. Domenikus Verlag, Prag 1867.

[2] MAHRENHOLTZ, O.: Elastic beam-like ring on a Winkler foundation. In: Recent Advances in Appl. Mechanics, Ed. J.T. Katsikadelis et al., NTU Athens Publ. 2000, pp. 214-219.

Prof. Dr.-Ing. Oskar Mahrenholtz
Hermann-Löns-Weg 17f
D-21220 Seevetal